Chapitre 5 : PROBABILITES

1° partie : Analyse combinatoire

1. Introduction

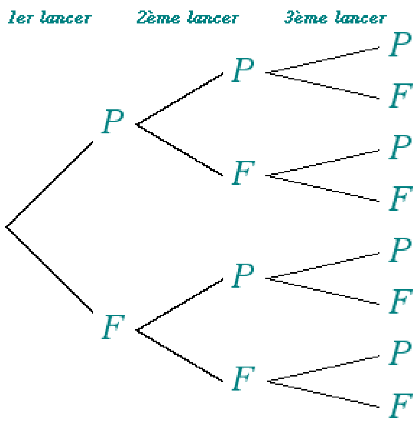
L'analyse combinatoire comprend un ensemble de méthodes qui permettent de déterminer **le nombre** de tous les résultats possibles d'une expérience (situation) particulière.

1.1 Savoir dénombrer:

Exemple 1 : ***Un arbre...***

Un enfant joue à "pile ou face" en lançant trois fois consécutivement une pièce de 1 euro et en notant, pour chaque lancer, le résultat obtenu.

Combien de possibilités l'enfant rencontre-t-il ?



A l'aide de cet arbre, nous déduisons que l'enfant rencontre 8 possibilités : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF.

Exemple 2 : ***Un tableau...***

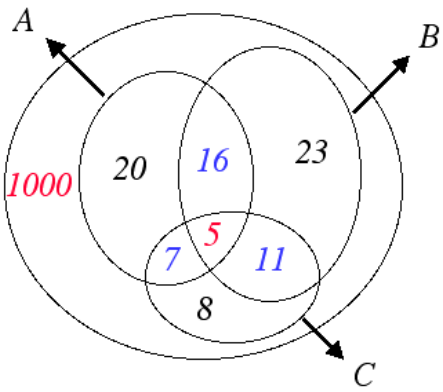
Je lance deux dés équilibrés et numérotés de 1 à 6. Je fais la somme des points obtenus. Combien de possibilités ai-je d'obtenir 7 ?

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A l'aide de ce tableau, nous déduisons que j'ai 6 possibilités d'obtenir 7.

Exemple 3 : ***Un diagramme...***

Lors d'un referendum deux questions étaient posées. Sur 100 personnes, 65 ont répondu oui à la première question, 51 personnes ont répondu oui à la deuxième et 46 ont répondu oui aux deux questions. Combien de personnes ont répondu non aux deux questions ?



A l'aide de ce diagramme, nous déduisons que 20 pièces présentent uniquement le défaut A, 23 pièces présentent uniquement le défaut B et 8 pièces présentent uniquement le défaut C.

Exemple 4 : ***Par produit***

Un système d'immatriculation comprend 4 chiffres dont le premier est distinct de 0, et de 2 lettres distinctes de I et O et différentes.

Le nombre de plaques est n = 9x10x10x10x24x23 = 4 968 000.

Conclusion : Selon les situations auxquelles qui se présentent, dénombrer l'ensemble des cas possibles peut s'effectuer de différentes manières, le tout est de choisir une méthode d'analyse de la situation qui soit à la fois correcte et efficace.

1.2. Notion de factorielle :

La **factorielle** d'un nombre naturel non nul est le produit de tous les nombres naturels non nuls égaux ou inférieurs à ce nombre naturel.

On note: **n ! = n.(n-1).(n-2).(n-3)……2.1** $\forall n \in N_0$

avec **0 ! = 1**

Propriété : $\forall n \in N_0 : n.(n-1)! = n!$

Exemples : 6 ! = 6. 5.4.3.2.1 = 720 et 6 ! = 6 . 5 !

2. ARRANGEMENTS

2.1. Arrangements sans répétition

a) Exemple

Tous les mots de 2 lettres **différentes** que l'on peut former avec les 4 lettres a, b, c et d sont

ab / ac / ad   ba / bc / bd   ca / cb / cd   da / db / dc

Ce sont les **arrangements sans répétition de 2 lettres prises parmi 4** : il y en a 12. En effet, à chacun des 4 choix pour la première lettre correspondent 3 choix pour la deuxième lettre.

On note : $A_4^2 = \underbrace{4.3}_{2\ facteurs} = 12$

b) Définition

On appelle arrangement (sans répétition) de n objets pris p à p ($n \geq p$), tout ensemble ordonné de p de ces éléments, tous distincts.

Un arrangement est donc caractérisé par la nature des éléments ou par leur ordre.

Le **nombre** total de ces arrangements est noté A_n^p

c) Calcul de A_n^p

Exemple : Le code secret d'un cadenas se compose de 4 chiffres différents pris parmi les chiffres de 0 à 10. Combien peut-on fabriquer de cadenas ?

Pour remplir la 1° place du code on dispose de 10 chiffres

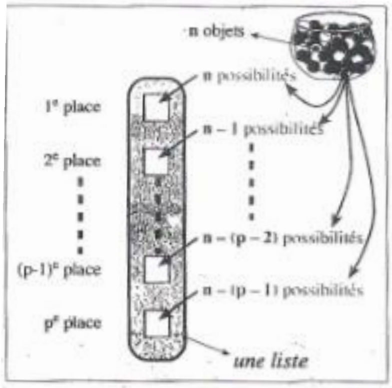
Pour remplir la 2° place du code on peut choisir un chiffre parmi les 9 chiffres restants puisque un chiffre ne peut être choisi deux fois et que le chiffre de la 1° place est interdit

Pour remplir la 3° place du code on peut choisir un chiffre parmi les 8 chiffres restants puisque un chiffre ne peut être choisi deux fois et que les chiffres des 1° et 2° places sont interdits

Pour remplir la 3° place du code on peut choisir un chiffre parmi les 7 chiffres restants puisque un chiffre ne peut être choisi deux fois et que les chiffres des 1°, 2° et 3° places sont interdits

Au total il y a A_{10}^4 = 10.9.8.7 = 5040 cadenas possibles

Formule : Généralisons l'exemple précédent



- Pour remplir la première place de la liste, nous pouvons choisir un objet quelconque parmi les n objets : n choix sont donc possibles.
- Pour remplir la deuxième place de la liste, nous pouvons choisir un objet quelconque parmi les n − 1 objets qui restent puisqu'un objet ne peut être choisi deux fois et que 1 objet est interdit : n-1 choix sont possibles.
- Pour remplir la troisième place de la liste, nous pouvons choisir un objet quelconque parmi les n − 2 objets qui restent puisqu'un objet ne peut être choisi à deux fois et que 2 objets sont interdits : n-2 choix sont possibles.
- ...
- Pour remplir la p^e place de la liste, nous pouvons choisir un objet quelconque parmi les $n-(p-1)$ objets qui restent puisqu'un objet ne peut être choisi deux fois et que $p-1$ objets sont interdits : $n-p+1$ choix sont donc possibles.

  Bien entendu, pour remplir la liste, nous ne pouvons tirer plus d'objets que ceux qui sont donnés au départ : $p \leqslant n$.
- Finalement, nous pouvons conclure que le nombre d'arrangements sans répétition de n objets pris p à p est

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1) \quad \text{avec} \quad p \leqslant n.$$

Avec la notation factorielle, A_n^p s'écrit: $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

En effet, ………

Exemple: Nombre d'équipes de football possibles que peuvent former 14 élèves si on indique la place que doit occuper chaque joueur ? : $A_{14}^{11} = \frac{14\,!}{(14-11)\,!} = 14529715200$

2.2. Arrangements avec répétition

a) Exemple

Tous les mots de 2 lettres que l'on peut former avec les lettres a, b et c sont :

aa / ab / ac   ba / bb / bc   ca / cb / cc

Ce sont les **arrangements avec répétitions de 2 lettres choisies parmi 3** : il y en a 9

En effet, à chacun des 3 choix pour la première lettre correspondent encore 3 choix pour la deuxième lettre.

On note : $\alpha_3^2 = 3^2 = 9$

b) Définition

Un arrangement de n objets pris p à p avec répétition est un arrangement où chaque objet peut être répété jusqu'à p fois.

Le **nombre** total de ces arrangements est noté α_n^p

c) Calcul de α_n^p

Comme à chaque place on a n choix possibles, on aura : $\boxed{\alpha_n^p = n^p}$

Exemple : Le code secret des cartes bancaires est formé de 4 chiffres choisis parmi 0,1,2,…9.

La répétition étant bien sûr autorisée, on aura au total $\alpha_{10}^4 = 10^4 = 10000$ codes possibles.

3. PERMUTATIONS

3.1. Permutations sans répétition

a) Exemple

Tous les mots de 3 lettres différentes que l'on peut former avec les 3 lettres a, b et c sont :

abc / acb / bac / bca / cab / cba

Ce sont les **permutations sans répétition de 3 lettres** : il y en a 6. En effet, il s'agit du cas particulier des 6 arrangements sans répétitions de 3 lettres prises 3 à 3.

On note : $P_3 = A_3^3 = 3.2 = 6$

b) Définition

Une permutation de n objets est un ensemble ordonné de ces n objets. Les permutations de ces n objets constituent un cas particulier des arrangements. C'est le cas où n = p. Deux permutations ne diffèrent que par l'ordre des objets.

c) Calcul de P_n (nombre total de permutations de n éléments) :

$$\boxed{P_n = A_n^n = n!}$$

Exemple: Nombre d'équipes de football possibles que peuvent former 11 élèves si on indique la place que doit occuper chaque joueur :

$$\boldsymbol{P_{11} = 11! = 39916800}$$

3.2. Permutations avec répétitions

a) Exemple

Combien de mots différents peut-on former avec les 5 lettres du mot $LILLE$? Dans un premier temps on numérote les 3 lettres L pour les distinguer : les permutations des lettres $L_1IL_2L_3E$ sont au nombre de 5! Si on supprime les indices, il y a 3! façons différentes de placer les 3 lettres L pour avoir le même mot (c'est-à-dire : $L_1IL_2L_3E$ et $L_2IL_3L_1E$ sont les mêmes mots).

Il y aura donc $P_3^5 = \dfrac{5!}{3!} = 20$ mots différents possibles.

b) *Définition*

On désigne par $P_n^{r_1,r_2,\ldots r_k}$ le nombre de permutations de n objets parmi lesquels il y en a r_1 semblables, r_2 semblables, ..., r_k semblables avec $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$

c) Calcul de $P_n^{r_1,r_2,\ldots r_k}$

Déterminer le nombre de permutations des n objets suivants : $\underbrace{a,\ldots,a}_{r_1},\underbrace{b,\ldots,b}_{r_2},\ldots\ldots\underbrace{f,\ldots,f}_{r_k}$

Si on individualise tous les n éléments il y a $n!$ permutations de ces n éléments.

Mais il y a r_1 ! permutations des lettres a

r_2 ! permutations des lettres b

...

r_k ! permutations des lettres f

Chaque permutation avec répétitions donne donc r_1 !.r_2 !........r_k ! fois plus de permutations sans répétition que de permutations avec répétitions.

Donc $$\boxed{P_n^{r_1,r_2,\ldots r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}}$$.

Exemple: Nombre de mots de 8 lettres avec les lettres du mot « indienne ».

Comme on a 3.n, 2.i et 2.e : $P_8^{3,2,2,1} = \dfrac{8!}{3!2!2!1!} = 1680$ mots

d) Remarque : Permutation circulaire

Le rangement de 4 objets fournit 4! = 24 permutations différentes mais le rangement de ces 4 objets sur un cercle en ne considérant que les positions **relatives** de ces objets entre eux ne fournit plus que 6=3 ! permutations différentes (un objet est fixé et les 3 autres permutent autour de lui).

Généralisation: n objets peuvent être disposés sur un cercle de (n–1)! manières différentes, soit le nombre de permutations P_n divisé par le nombre de manières différentes de choisir la première place.

Attention : il y a lieu, dans les exercices, de bien analyser la situation, et de dire si l'on tient compte de la position effective ou de la position relative des objets entre eux !

4. COMBINAISONS

4.1 Combinaisons sans répétitions

a) Définition

On appelle combinaison de p éléments pris parmi n ($n \geq p$), tout ensemble que l'on peut former en choisissant p de ces éléments, sans considération d'ordre.

Deux combinaisons distinctes diffèrent donc par la nature d'au moins un élément.

Exemple: De combien de manières peut-on choisir, pour le conseil des élèves, une délégation de 3 élèves dans une classe de 17 ?

Si les trois élèves choisis sont A, B, et C, une permutation quelconque de ceux-ci ne changera rien au groupe choisi (la combinaison choisie).

Donc, dans ce cas-ci, à une combinaison correspondra P_3 = 3 ! arrangements.

Au total, on aura : le nombre de combinaisons = $\frac{A_{17}^{3}}{P_3} = \frac{17!}{14!.3!} = 680$

b) Calcul de C_n^p (nombre total de combinaisons de n éléments p à p) :

Nous pouvons généraliser le raisonnement suivi dans l'exemple ci-dessus, et dire :

On peut remarquer qu'un arrangement de n objets p à p n'est autre que le produit d'une combinaison de n objets p à p par le nombre de permutations de ces p éléments: $A_n^p = C_n^p.P_p$

D'où $\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$

c) Propriétés des combinaisons :

1. $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$

   Démonstration: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^{n-p}$

2. $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}}$

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!}+\frac{(n-1)!}{p!\big((n-1)-p\big)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}\\
&= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)(n-p-1)!}\\
&= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\
&= \frac{(n-1)!\big(p+n-p\big)}{p!(n-p)!}\\
&= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!}\\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}=C_n^p
\end{aligned}
$$

4.2 Combinaisons avec répétitions

a) Définition

Supposons que l'on étudie la répartition de n objets en fonction de p critères, et que l'on cherche le nombre de telles répartitions possibles. Une telle répartition est appelée combinaison avec répétition .

Exemple :

Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos ? N.B. : Chaque pièce est partagée en 2 côtés sur chacun desquels figurent de 0 à 6 points.

b) Calcul

Le nombre de combinaisons avec répétition est égal au nombre de combinaisons sans répétition pour lequel on remplace n par n+p-1, c'est-à-dire : C_{n+p-1}^{p} .

En effet : soient x_1 , x_2 , … , x_n objets qu'on sépare par p frontières

$$\left|x_1\ x_2\right|x_3\ \ x_4\left|x_5\ x_6\cdots x_{n-3}\right|x_{n-2}\ x_{n-1}\ x_n$$

Le nombre de combinaisons avec répétition est donc égal au nombre de manières de séparer les x_i par p frontières. C'est donc le nombre de manières de choisir p objets parmi n + p – 1 objets sans tenir compte de l'ordre.

Exemple:

Lors d'un sondage dans une université on pose à 100 étudiants 1 question comportant 3 réponses (a,b,c) possibles. Quel nombre de configurations différentes peut-on obtenir, (en ne tenant compte dans la répartition que du nombre de réponses a, b, c données) ?

On a : n = 100 et p=3 et on aura alors $C_{102}^{3}=\dfrac{102.101.100}{3.2.1}=171700$ configurations.

5. Le Triangle de Pascal

En nous basant sur les propriétés qui précèdent, nous pouvons construire le Triangle de Pascal, qui nous permet de calculer le nombre de combinaisons C_n^p sans avoir à calculer de factorielles :

Comme : 1) $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^0 = C_n^n = 1$

2) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

En créant un tableau avec en indices des lignes les valeurs de n (n=0, n=1,n=2,…) et en indices des colonnes celles de p (p=1,p=2,…) , on aura dans les cellules du tableau les valeurs de C_n^p :

C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}
	C_n^p

P \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
6	…	…	…	…	…	…	…

n \ P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

… et ainsi de suite…

6. Le binôme de Newton

Le binôme de Newton est le produit de n facteurs égaux à (a + b), c'est-à-dire la nième puissance de ce binôme et nous allons montrer que : $\boxed{(x+a)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k}$.

Rem. : Les C_n^p peuvent être déterminés au moyen du triangle de Pascal.

Vérifions cette formule pour n=1, n=2, n=3 (formules bien connues, en fait) :

$$(x+a)^1 = x+a = C_1^0 x^1 a^0 + C_1^1 x^0 a^1$$
$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = C_2^0 x^2 a^0 + C_2^1 x^1 a^1 + C_2^2 x^0 a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3 = C_3^0 x^3 a^0 + C_3^1 x^2 a^1 + C_3^2 x^1 a^2 + C_3^3 x^0 a^3$$

Nous allons démontrer la formule **par récurrence**, c'est-à-dire que comme nous venons de la démontrer pour n=1 (et même n =2 et n=3) nous allons démontrer que si la formule est correcte pour n, elle le sera pour n+1, et ce, quel que soit n. Dès lors, puisqu'elle est vraie pour n=1 (ou 2 ou 3), elle le sera pour tout n.

Supposons que : $(x+a)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k$; alors, comme $(x+a)^{n+1} = (x+a).(x+a)^n$, on aura :

$$(x+a)^{n+1} = (x+a).\sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k = (x+a).(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + ... + C_n^n a^n)$$

$$= C_n^0 x^{n+1} + C_n^1 x^n a + C_n^2 x^{n-1} a^2 + ... + ... + C_n^{n-1} x^2 a^{n-1} + C_n^n x a^n$$

$$+ C_n^0 x^n a + C_n^1 x^{n-1} a^2 + C_n^2 x^{n-2} a^3 + ... + ... + C_n^{n-1} x \; a^n + C_n^n a^{n+1}$$

$$= C_n^0 x^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) x^n a + (C_n^1 + C_n^2) x^{n-1} a^2 + ... + (C_n^{n-1} + C_n^n) x^1 a^n + C_n^n a^{n+1}$$

et comme $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ et que $C_1^0 = C_2^0 = ... = C_m^0 = 1$

$$= C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n-1} a^2 + ... + ... + C_{n+1}^{n-1} x^2 a^{n-1} + C_{n+1}^n x a^n + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i x^i a^{(n+1)-i}$$

ce qui est bien la formule annoncée.

__Exemple :__ $(x+2)^5 = x^5 + 5.x^4.2 + 10.x^3.2^2 + 10.x^2.2^3 + 5.x.2^4 + 2^5$

$$= x^5 + 10.x^4 + 40.x^3 + 80.x^2 + 80.x + 32$$

Applications :

La formule du binôme de Newton est d'une grande utilité dans bien des domaines des mathématiques.

Ainsi, souvenons-nous des relations liant les nombres complexes, les exponentielles, et la trigonométrie.

Nous avons vu que: $e^{ix} = \cos x + i.\sin x$ et que $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

De plus, nous savons que : $(\cos x + i.\sin x)^n = \cos nx + i.\sin nx$ (Formule de Moivre)

- En appliquant la formule du binôme de Newton à $(\cos x + i.\sin x)^n$, nous obtiendrons le cosinus et le sinus du n-uple d'un angle en fonction du cosinus ou du sinus de cet angle.

- En faisant de même avec la forme exponentielle du cosinus (ou du sinus), nous obtiendrons, après simplifications, la $n^{è}$ puissance du cosinus (ou du sinus) en fonction du cosinus (du sinus) de multiples de cet angle.

- … on pourra encore découvrir bien des applications de ce fameux binôme ; certaines d'entre elles figurent sur les feuilles d'exercices (un exercice concernant une certaine somme de cosinus, par exemple)